# 1 Der Lame Operator

In der linearen Elastizitätstheorie ist der Lame Operator ein wichtiger Bestandteil.

**Definition 1.1** (Lame Operator)**.** *Der Differenzialoperator $L$*

$$Lu = \mu\Delta u + (\lambda+\mu) grad\ div\ u$$

*wobei*

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2, \quad grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T, \quad div\ u = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3, \quad \lambda, \mu > 0$$

*heißt Lame Operator. Der Lame Operator $L$ hat als Matrix die folgende Gestalt*

$$Lu = \begin{pmatrix} \mu\Delta + (\lambda+\mu)\partial_1^2 & (\lambda+\mu)\partial_1\partial_2 & (\lambda+\mu)\partial_1\partial_3 \\ (\lambda+\mu)\partial_2\partial_1 & \mu\Delta + (\lambda+\mu)\partial_2^2 & (\lambda+\mu)\partial_2\partial_3 \\ (\lambda+\mu)\partial_3\partial_1 & (\lambda+\mu)\partial_3\partial_2 & \mu\Delta + (\lambda+\mu)\partial_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

*Das Differentialgleichungssystem*

$$-Lu = -[\mu\Delta u + (\lambda+\mu) grad\ div\ u] = f$$

*wird als Lame-Navier System für ein 3D Verschiebungsfeld $u$ bezeichnet.*

Im Konstrukiven Ingenieurbau sind die Eigenwerte des Diffentialoperators von Interesse. Aus Überlagerung der zugehörigen Eigenfunktionen kann das Verhalten von Verschiebungen beschrieben werden. Die Eigenwerte können analytisch für einige Gebiete bestimmt werden. Werden die Gebiete zu kompliziert, ist eine analytische Bestimmung leider nicht mehr möglich.

## 1.1 Tangetiale Randbedingungen

Wir betrachten das Gebiet $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ für das Verschiebungsfeld $u$. Wir lösen also das Eigenwertproblem

$$Lu(x,y,z) = -vu(x,y,z), \quad (x,y,z) \in ]0, L_x[ \times ]0, L_y[ \times ]0, L_z[$$

mit den Randbedingungen

$$u_1 = 0, \quad y \in \{0, L_y\},\ z \in \{0, L_z\}$$

$$u_2 = 0, \quad x \in \{0, L_x\},\ z \in \{0, L_z\}$$

$$u_3 = 0, \quad x \in \{0, L_x\},\ y \in \{0, L_y\}.$$

Zu Beachten ist hier, dass $u(x,y,z) = (u_1(x,y,z), u_2(x,y,z), u_3(x,y,z))^T$ eine vektorwertige Funktion ist. Wir wählen den Ansatz

$$u = \sum_{j=1}^{8} \gamma_j k_j e^{ik_j x},$$

wobei

$$[k_1, k_2, \dots, k_8] = \begin{pmatrix} m & m & m & m & -m & -m & -m & -m \\ n & n & -n & -n & n & n & -n & -n \\ l & -l & l & -l & l & -l & l & -l \end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ist. Setzen wir unsere Ansatzfuntion in das Eigenwertproblem unter Beachtung der Randbedingungen ein, erhalten wir nach einigen algebraischen Umformungen als Lösung

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m\pi}{L_x} \cos(\frac{m\pi}{L_x}x) \ \sin(\frac{n\pi}{L_y}y) \ \sin(\frac{l\pi}{L_z}z) \\ \frac{n\pi}{L_y} \sin(\frac{m\pi}{L_x}x) \ \cos(\frac{n\pi}{L_y}y) \ \sin(\frac{l\pi}{L_z}z) \\ \frac{l\pi}{L_z} \sin(\frac{m\pi}{L_x}x) \ \sin(\frac{n\pi}{L_y}y) \ \cos(\frac{l\pi}{L_z}z) \end{pmatrix}, \quad l, m, n = 0, 1, 2, \dots .$$

Die Eigenwerte $v_{mnl}$ ergeben sich zu

$$v_{mnl} = \mu \left( (\frac{m\pi}{L_x})^2 + (\frac{n\pi}{L_y})^2 + (\frac{l\pi}{L_z})^2 \right) + (\lambda + \mu) \left( (\frac{m\pi}{L_x})^2 + (\frac{n\pi}{L_y})^2 + (\frac{l\pi}{L_z})^2 \right).$$