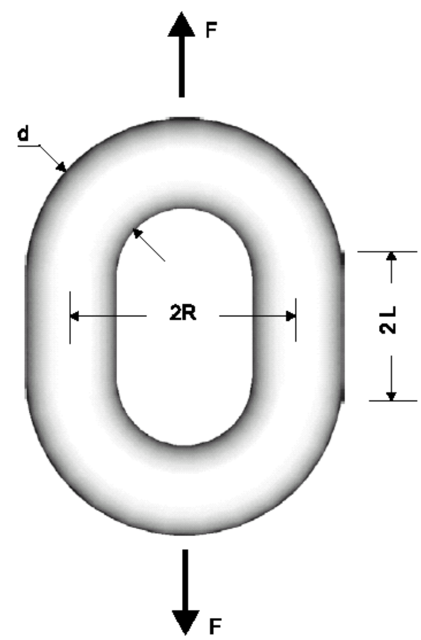
Übung Nr: 6
Thema: Satz von Castigliano zur Berechnung stark gekrümmter Balken

Aufgabe 6.2
Gegeben: d = 8mm R = 10mm



a) Für das dargestellte Kettenglied ist die Länge L so zu bestimmen, daß bezogen auf die im Kettenglied auftretenden maximalen Nenn-(Zug)spannungen aus Biegung und Zug infolge der Zugkraft F eine möglichst gute Bauteilausnutzung erfolgt.

b) Wie groß ist die maximal zulässige Kraft (F)zul wenn eine zulässige Nennspannung (σ)zul = 215 N/mm(2) angenommen wird.

I. Freischnitt mit Ausnutzung der Symmetrie

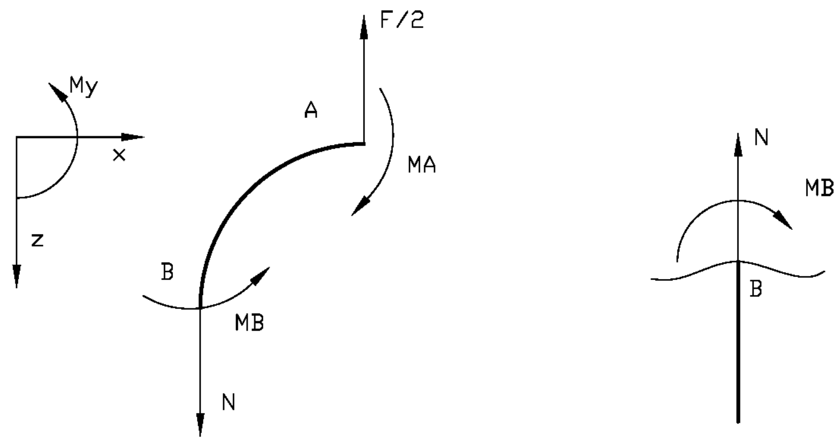
GGW:

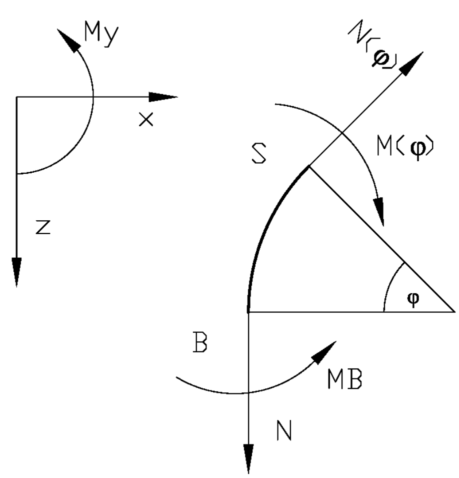
$$\sum F_Z \equiv 0 \rightarrow \boxed{N = \frac{F}{2}} \qquad \sum M_A \equiv 0 \rightarrow M_B - M_A + Nr = 0 \rightarrow \boxed{M_B = M_A - \frac{F}{2}r}$$

Schnittlasten:
$\sum M_{Zentrum} = 0 = Nr + M_B - M(\varphi) - N(\varphi)r$ Setze M_φ für M(φ) und N_φ für N(φ)
$\frac{M_\varphi}{r} + N_\varphi = \frac{M_B}{r} + N = F^*$ An beliebigem Schnittufer ist F^* konstant.

Momentengleichgewicht um S liefert:
$\sum M_0 = 0 = -M_\varphi + M_B + N(r - r\cos(\varphi))$

$$M_\varphi = M_B + N(r - r\cos(\varphi)) = M_A - \frac{F}{2}r + \frac{F}{2}(r - r\cos(\varphi)) = \boxed{M_A - \frac{F}{2}r\cos(\varphi)}$$


My
x
z
F/2
A
MA
B
MB
N
N
MB
B


My
x
z
N(φ)
S
M(φ)
φ
B
MB
N

$M_z = M_B = M_A - \frac{F}{2}r$ Schnittmoment im geraden Bereich
M_A ist unbekannt,da 1-fach statisch unbestimmt bemühen wir den Satz von CASTIGLIANO

Für den stark gekrümmten Balken ist Querkraft nicht vernachlässigbar:
$W = \int \left(\frac{M_\varphi^2}{2EZ} + \frac{(F^*)^2}{2EA} \right) r d\varphi$ mit $Z = \int \frac{\eta^2}{1+\frac{\eta}{R}} dA$ (modifiziertes I:Flächenträgheitsmoment)
η: Zusätzliche Koordinate mit Nullpunkt in der Mitte der Balkenhöhe (analog zu e), also η [-h/2 bis h/2]

Für den geraden Balken vernachlässigen wir wie gehabt Quer- und Längskräfte:$W_{F_b} = \int \frac{M_b^2}{2EI} dz$

$$W_{ges} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_\varphi^2}{2EZ} + \frac{(F^*)^2}{2EA} \right) r d\varphi + \int_0^l \frac{M_z^2}{2EI} dz = \qquad \text{mit } F^* = \frac{M_B}{r} + N \text{ , } M_A - \frac{F}{2}r \text{ und } N = \frac{F}{2}$$

$$0 = \frac{\partial W_{ges}}{\partial M_A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_\varphi}{EZ} \frac{\partial M_\varphi}{\partial M_A} r d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F^*}{EA} \frac{\partial F^*}{\partial M_A} r d\varphi + \int_0^l \frac{M_z}{EI} \frac{\partial M_z}{\partial M_A} dz$$

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial M_A} = \frac{\partial \left(M_A - \frac{F}{2} r\cos(\varphi) \right)}{\partial M_A} = 1 \qquad \frac{\partial F^*}{\partial M_A} = \frac{\frac{M_B}{r} + N}{\partial M_A} = \frac{\partial \left(\frac{M_A - \frac{F}{2}r}{r} + \frac{F}{2} \right)}{\partial M_A} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial M_A} = \frac{\partial \left(M_A - \frac{F}{2} r \right)}{\partial M_A} = 1$$

$$0 = \frac{\partial W_{ges}}{\partial M_A} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{M_A r - \frac{F}{2} r^2 \cos(\varphi)}{EZ} \right) d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{M_A}{r}}{EA} \frac{1}{r} r \right) d\varphi + \int_0^l \left(\frac{M_A - \frac{F}{2} r}{EI} \right) dz$$
$$0 = \tfrac{1}{ZE} \left(\tfrac{1}{2}\pi r M_A - \tfrac{1}{2} F r^2 \right) + \tfrac{1}{2} \tfrac{\pi}{ArE} M_A + \tfrac{1}{2EI} \left(2lM_A - Flr \right)$$
$$0 = \tfrac{1}{Z} \left(\pi r M_A - F r^2 \right) + \tfrac{\pi}{Ar} M_A + \tfrac{1}{I} \left(2lM_A - Flr \right)$$
$$0 = \tfrac{\pi}{Z} r M_A - \tfrac{F}{Z} r^2 + \tfrac{\pi}{Ar} M_A + 2 \tfrac{l}{I} M_A - Fl\tfrac{r}{I}$$

$$\boxed{\frac{F \left(\frac{r^2}{Z} + l\frac{r}{I} \right)}{\left(\frac{\pi}{Z} r + \frac{\pi}{Ar} + 2\frac{l}{I} \right)} = M_A}$$

Nun ist L so zu bestimmen dass $\sigma_i = \sigma_a$
$\sigma_i = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\varphi}{Z} \left(\frac{\eta}{1+\frac{\eta}{r}} \right)$ mit $\eta = -\frac{d}{2}$ ist $\sigma_i = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\varphi}{Z} \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1+\frac{-d}{2r}} \right)$
$\sigma_a = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\varphi}{Z} \left(\frac{\eta}{1+\frac{\eta}{r}} \right)$ mit $\eta = \frac{d}{2}$ ist $\sigma_a = \frac{F^*}{A} + \frac{M_\varphi}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}} \right)$

$\sigma_i = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A - \frac{F}{2} r\cos(\varphi)}{Z} \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1+\frac{-d}{2r}} \right)$ $\quad \max \sigma_i(\varphi)$ für $\varphi = 0 \rightarrow \sigma_{i\,\max} = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A - \frac{F}{2} r}{Z} \left(\frac{-\frac{d}{2}}{1+\frac{-d}{2r}} \right)$

$\sigma_a = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A - \frac{F}{2} r\cos(\varphi)}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}} \right)$ $\quad \max \sigma_a(\varphi)$ für $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sigma_{a\,\max} = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A}{Z} \left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}} \right)$

Durch Gleichsetzen der Maximalgleichungen und Einsetzen der Momentengleichung ist die Länge eindeutig zu bestimmen.

$$\sigma_i = \sigma_a \to \frac{M_A - \frac{F}{2}r}{Z}\left(\frac{-\frac{d}{2}}{1+\frac{-d}{2r}}\right) = \frac{M_A}{Z}\left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}}\right)$$

$$\left(M_A - \frac{F}{2}r\right)\left(\frac{-\frac{d}{2}}{1+\frac{-d}{2r}}\right) = M_A\left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}}\right)$$

$$M_A\left(\frac{-\frac{d}{2}}{1+\frac{-d}{2r}} - \frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}}\right) = \frac{F}{2}r\left(\frac{-\frac{d}{2}}{1+\frac{-d}{2r}}\right)$$

$$M_A\left(\frac{-\frac{8\,\mathrm{mm}}{2}}{1+\frac{-8\,\mathrm{mm}}{2\cdot 10\,\mathrm{mm}}} - \frac{\frac{8\,\mathrm{mm}}{2}}{1+\frac{8\,\mathrm{mm}}{2\cdot 10\,\mathrm{mm}}}\right) = F\cdot 5\,\mathrm{mm}\left(\frac{-\frac{8\,\mathrm{mm}}{2}}{1+\frac{-8\,\mathrm{mm}}{2\cdot 10\,\mathrm{mm}}}\right)$$

$$M_A\left(-\tfrac{200}{21}\,\mathrm{mm}\right) = F\left(-\tfrac{100}{3}\,\mathrm{mm}^2\right) \to F = \frac{2M_A}{7\,\mathrm{mm}}$$

Einschub zu Z:

$Z = I\left[1+\frac{3}{6}(\frac{e}{r})^2 + \frac{3\cdot 5}{6\cdot 8}(\frac{e}{r})^4 + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 10}(\frac{e}{r})^6 + ...\right]$ d=2e [Quelle ten Bosch]

$$Z = \tfrac{\pi}{64}4096\,\mathrm{mm}^4\left[1+\tfrac{3}{6}(\tfrac{4}{10})^2 + \tfrac{3\cdot 5}{6\cdot 8}(\tfrac{4}{10})^4 + \tfrac{3\cdot 5\cdot 7}{6\cdot 8\cdot 10}(\tfrac{4}{10})^6\right]$$

$$Z = \tfrac{\pi}{64}4096\,\mathrm{mm}^4\cdot\tfrac{17\,014}{15\,625} = \tfrac{1088\,896}{15\,625}\pi\,\mathrm{mm}^4 = 2.\,189\,4\times 10^{-10}\,\mathrm{m}^4$$

$$M_A = \frac{-\frac{2M_A}{7\,\mathrm{mm}}\left(\frac{r^2}{Z} + l\frac{r}{I}\right)}{\left(\frac{\pi}{Z}r + \frac{\pi}{Ar} + 2\frac{l}{I}\right)}$$

$$1 = \frac{\frac{2}{7\,\mathrm{mm}}\left(\frac{100\,\mathrm{mm}^2}{\frac{1088\,896}{15\,625}\pi\,\mathrm{mm}^4} + l\frac{10\,\mathrm{mm}}{\frac{\pi}{64}4096\,\mathrm{mm}^4}\right)}{\left(\frac{\pi}{\frac{1088\,896}{15\,625}\pi\,\mathrm{mm}^4}10\,\mathrm{mm} + \frac{\pi}{16\pi\,\mathrm{mm}^2\cdot 10\,\mathrm{mm}} + 2\frac{l}{\frac{\pi}{64}4096\,\mathrm{mm}^4}\right)} = \frac{2}{7(\,\mathrm{mm})\left(\frac{407\,639}{2722\,240\,\mathrm{mm}^3} + \frac{1}{32\pi}\frac{l}{\mathrm{mm}^4}\right)}\left(\frac{390\,625}{272\,224\pi\,\mathrm{mm}^2} + \frac{5}{32\pi}\frac{l}{\mathrm{mm}^3}\right)$$

$$7\,(\,\mathrm{mm})\left(\tfrac{407\,639}{2722\,240\,\mathrm{mm}^3} + \tfrac{1}{32\pi}\tfrac{l}{\mathrm{mm}^4}\right) = 2\left(\tfrac{390\,625}{272\,224\pi\,\mathrm{mm}^2} + \tfrac{5}{32\pi}\tfrac{l}{\mathrm{mm}^3}\right)$$

$$\tfrac{7\cdot 407\,639}{2722\,240\,\mathrm{mm}^2} + \tfrac{7}{32\pi}\tfrac{l}{\mathrm{mm}^3} = \tfrac{2\cdot 390\,625}{272\,224\pi\,\mathrm{mm}^2} + \tfrac{10}{32\pi}\tfrac{l}{\mathrm{mm}^3}$$

$$\left(\tfrac{7\cdot 407\,639}{2722\,240\,\mathrm{mm}^2} - \tfrac{2\cdot 390\,625}{272\,224\pi\,\mathrm{mm}^2}\right)\tfrac{32\pi\,\mathrm{mm}^3}{3} = l$$

$$\boxed{l = 4.\,513\,7\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

Zu Teil B)

$$\sigma_a = \frac{M_A}{Ar} + \frac{M_A}{Z}\left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}}\right) \qquad F = \frac{2M_A}{7\,\mathrm{mm}} \to M_A = \frac{7}{2}\,\mathrm{mm}\cdot F \qquad \sigma_a = \sigma_{zul} = 215\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma_a = M_A\left(\frac{1}{Ar} + \frac{1}{Z}\left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}}\right)\right)$$

$$\frac{\sigma_a}{\left(\frac{1}{Ar} + \frac{1}{Z}\left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}}\right)\right)} = M_A \to F = \frac{2\sigma_a}{7\,\mathrm{mm}\left(\frac{1}{Ar} + \frac{1}{Z}\left(\frac{\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2r}}\right)\right)}$$

$$F = \frac{2\cdot 215\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{7\,\mathrm{mm}\left(\frac{1}{16\pi\,\mathrm{mm}^2 10\,\mathrm{mm}} + \frac{1}{\frac{1088\,896}{15\,625}\pi\,\mathrm{mm}^4}\left(\frac{\frac{8\,\mathrm{mm}}{2}}{1+\frac{8\,\mathrm{mm}}{20\,\mathrm{mm}}}\right)\right)} = \frac{292\,640\,800}{225\,087}\pi\,\mathrm{N}$$

$$\boxed{F = 4084.\,5\,\mathrm{N}}$$